

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στερεομετρία
(γεωμετρία του χώρου)

Επιπεδομετρία
(γεωμετρία του επιπέδου)

- Αξιοματική θεμελίωση
- Αρχικές έννοιες: χώρος, σημείο, ευθεία, επίπεδο,
- Αξιώματα: προτάσεις των οποίων την αλήθεια δεχόμαστε χωρίς να τις αποδείξουμε

Δεχόμαστε 1) την ύπαρξη ενός μη $\emptyset$ συνόλου, τα στοιχεία του οποίου καλούνται σημεία.
ii) μια κλάση υποσυνόλου του E , τα στοιχεία της οποίας καλούνται ευθείες

iii) μια κλάση υποσυνόλου τα στοιχεία της οποίας καλούνται επίπεδα.

Αξιώματα της στερεομετρίας κατά D. Hilbert (19)

- αξιώματα σχετικών θέσεων
- αξιώματα διάταξης
- αξιώματα γεωμετρικής ισοτιμίας
- αξίωμα παραλληλίας
- αξιώματα συνέχειας
- αξιώματα πληρότητας

Συμβολισμοί:

σημεία $A, B, \Gamma, C, \dots$

ευθείες ℓ, λ, θ

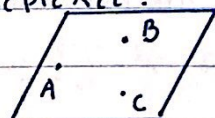
επίπεδα π, π_2, π

Αξιώματα σχετικών θέσεων

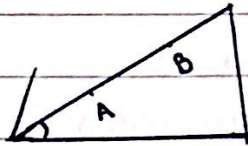
Αξίωμα (11) Για δύο διαφορετικά σημεία A, B υπάρχει μοναδική ευθεία ℓ που τα περιέχει (η ℓ συμβολίζεται με AB ή BA)



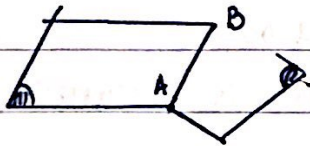
Αξίωμα (22) Για δοθέντα τρία μη συνευθειακά σημεία υπάρχει μοναδικό επίπεδο που τα περιέχει.



Αξίωμα (23) Αν δύο διαφορετικά σημεία A, B ανήκουν σε επίπεδο Π , τότε η ευθεία AB περιέχεται στο (Π) .



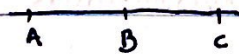
Αξίωμα (24) Αν δύο επίπεδα Π_1, Π_2 έχουν ένα κοινό σημείο A , τότε έχουν και δεύτερο κοινό σημείο.



Αξίωμα (25) Κάθε ευθεία περιέχει δύο τουλάχιστον σημεία. Κάθε επίπεδο περιέχει τρία τουλάχιστον μη συνευθειακά σημεία. Υπάρχουν τέσσερα τουλάχιστον μη συνεπίπεδα σημεία.

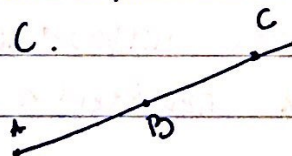
Αξιώματα διάταξης

Αξίωμα (A1) Αν το σημείο B βρίσκεται μεταξύ των A, C , τότε τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και το B είναι μεταξύ του C και του A .

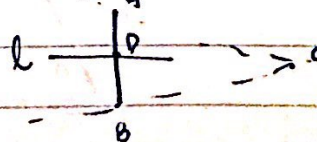


Αξίωμα (A2) Μεταξύ τριών μη συνευθειακών σημείων, μόνο ένα είναι μεταξύ των άλλων δύο.

Αξίωμα (A3) Για δύο τυχαία σημεία A, B υπάρχει σημείο C τ.ω. το B να είναι μεταξύ A και C .

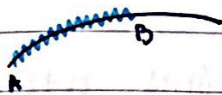


Αξίωμα (A4) {Pasch} Για τυχόντα τρία σημεία A, B, C και ευθεία l η οποία περιέχει σημείο D , το οποίο είναι μεταξύ A και B , τότε περιέχει είτε ένα σημείο μεταξύ των A, C , είτε ένα σημείο μεταξύ B, C .



Αξιώματα διάταξης $\Rightarrow$ ορίζονται οι έννοιες, ευθύγραμμο τμήματα, ημιευθεία, ημιεπίπεδο, ημίχωρος, γωνίες.

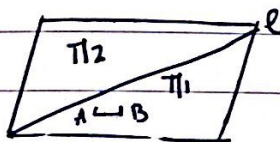
Ορισμός: Ευθύγραμμο τμήμα AB (ή BA) με άκρα $A \neq B$ είναι το σύνολο $\{A, B\} \cup \{C \mid C \text{ είναι σημείο μεταξύ } A, B\}$



Ημιευθείες: $\varepsilon = \{A\} = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

$B, B_1 \in S_2 \Leftrightarrow \text{το } A \text{ δεν ανήκει στο } BB_1$

Ημιεπίπεδα: Δίνεται επίπεδο π και ευθεία l που περιέχεται στο π . Τότε

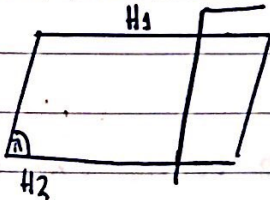


$$\pi / l = \pi_1 \cup \pi_2$$

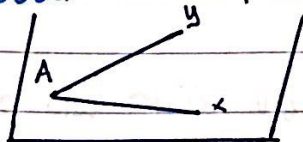
$$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$$

A, B δεν ανήκουν στο π_1 (ή στο π_2) ή l δεν τέμνει το AB

Ημίχωροι: Κάθε επίπεδο π χωρίζει έναν χώρο σε δύο ημίχωρους H_1, H_2 , δηλαδή $E \setminus \pi = H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$



Γωνίες: Έστω ημιευθείες Ax, Ay με κοινή ακμή A . Η γωνία $\angle Ay =$



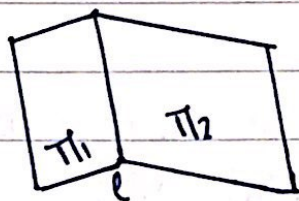
$=$ τομή του ημιεπιπέδου (Ax, B) και ημιεπιπέδων (Ay, C)

Σχετικές θέσεις δυο επιπέδων: Δίνονται τα επίπεδα π_1, π_2 με $\pi_1 \neq \pi_2$. Υπάρχουν μόνο τα εξής ευδεχόμενα:

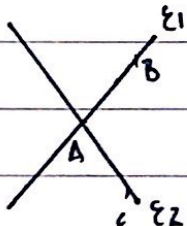
(i) $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Τα ονομάζουμε παράλληλα επίπεδα.



(ii) $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ π_1, π_2 τέμνονται κατά μίαν ευθεία ℓ .



Σχετικές θέσεις δυο ευθειών: Δίνονται ευθείες $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Τότε υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα.

(i)  $\epsilon_1 \cap \epsilon_2 = \{A\}$ και οι ευθείες είναι συνεπίπεδες

(ii) $\epsilon_1 \cap \epsilon_2 = \emptyset$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{οι } \epsilon_1, \epsilon_2 \text{ είναι συνεπίπεδες} \\ \text{οι } \epsilon_1, \epsilon_2 \text{ ΔΕΝ είναι συνεπίπεδες} \end{array} \right.$

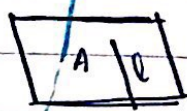
Ορισμός: Δυο ευθείες του χώρου καλούνται $\parallel$ αν είναι συνεπίπεδες και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Ορισμός: Δυο ευθείες καλούνται ασύμβατες αν δεν είναι συνεπίπεδες και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου: Δίνονται ευθεία ϵ και επίπεδο π . Υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα

(i) $\epsilon \subset \pi$ ευθεία περιέχεται στο π 

(ii) $\epsilon \cap \pi = \{A\}$



Έστω ευθεία ℓ του π η οποία δεν διέρχεται από το A . Τότε οι ευθείες ϵ, ℓ θα είναι ασύμβατες.